СЕКЦІЯ 10
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 519.866

Бойчук М.В.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Ярошенко О.І.
кандидат економічних наук,
доцент кафедри економіко-математичного моделювання
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

СТОХАСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ КРЕДИТНОЇ СТРАТЕГІЇ ФАРМАЦЕВТИЧНОГО ДИСТРИБ'ЮТОРА ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ ДОСТАВКИ ПРОДУКЦІЇ

STOCHASTIC MODELING OF OPTIMAL CREDIT STRATEGY OF A PHARMACEUTICAL PRODUCT DISTRIBUTOR WITH DELAY

АНОТАЦІЯ

У статті побудовано стохастичну модель оптимальної поведінки дистриб'ютора фармацевтичної продукції з урахуванням можливості залучення банківського кредиту, стохастичного характеру терміну доставки продукції та обмеження щодо мінімального прибутку від реалізації товару, проведено її дослідження, описано структуру оптимального процесу.

Ключові слова: дистриб'ютор фармацевтичної продукції, стохастична модель, оптимальний процес, оптимальна траєкторія, оптимальне керування.

АННОТАЦИЯ

В статье построена стохастическая модель оптимального поведения дистрибьютора фармацевтической продукции с учетом возможности привлечения банковского кредита, стохастического характера срока поставки продукции и ограничения по минимальной прибыли от реализации товара, проведены ее исследования, описана структура оптимального процесса.

Ключевые слова: дистрибьютор фармацевтической продукции, стохастическая модель, оптимальный процесс, оптимальная траектория, оптимальное управление.

ANNOTATION

A stochastic model of the optimal credit strategy of a pharmaceutical distributor in the market of pharmaceutical products has been constructed in the paper considering credit payments, product delivery delay.

Keywords: distributor of pharmaceutical products, stochastic model, optimal process, optimal trajectory, optimal control.

Постановка проблеми. Система дистрибуції – це складна економічна система, яка об'єднує виробників продукції та посередників, які спільно здійснюють маркетингову, комерційну, логістичну діяльність з переміщення продукції до кінцевого споживача та її продажу. У фармацевтиці дистрибуційна діяльність допомагає розвивати і пропонувати сучасні медичні послуги, надавати фінансову і комерційну підтримку фармацевтам тощо.

Проте є ряд проблем на шляху досягнення компаніями-дистриб'юторами стійкого розвитку. Насамперед вони пов'язані із специфікою лікарського засобу як товару, оскільки існують специфічні вимоги до його зберігання, транспортування, складування, документального супроводу тощо. Завдяки зв'язку дистриб'юторів з виробниками та споживачами фармацевтичної продукції вони залежать від політики обох сторін, які мають антагоністичні інтереси. Крім того, ситуація може ускладнюватися тривалими відстрочками платежів від роздрібних операторів, яку вирішити за рахунок отримання кредитів у банках не завжди вдається, оскільки вартість їх використання може перевищувати прибуток від проведення торговельних операцій. До цих проблем додається дисбаланс усіх макроекономічних показників у країні, наприклад, зниження купівельної спроможності національної валюти, підвищення відсоткових ставок за кредитами. Тому виникає необхідність вивчення діяльності компаній-дистриб'юторів як важливої ланки у розподілі лікарських засобів і виробів медичного призначення від виробника до споживача та методів управління їх господарсько-економічною діяльністю, яка б давала змогу зберегти та зміцнити їх становище на ринку.

Під час вивчення різних аспектів дистриб'юторської діяльності слід враховувати її суттєву особливість, а саме невизначеність, яка викликана неповнотою інформації про попит, терміни доставки продукції і вимагає пошуку ефективного механізму роботи в таких умовах. На практиці для того, щоб її подолати, часто орієнтуються на середні показники попиту чи тривалості доставки продукції, що може знижувати ефективність дистриб'юторської діяльності.

Таким чином, практичну цінність мають визначення оптимальної стратегії компанії-дистриб'ютора в умовах невизначеності, цільовою функцією якої є мінімізація затрат або максимізація прибутку з урахуванням різних обмежень, що обумовлені специфікою підприємницької діяльності та економічним середовищем, а також вивчення моделей, які б поруч зі стохастичним характером терміну доставки продукції враховували можливість залучення банківського кредиту.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботі [1] запропоновано детерміновану модель оптимальної кредитної стратегії ріелтера, а також проведено її дослідження за допомогою необхідних умов оптимальності (принципу Понтрягіна), в роботі [2] дослідження проведено за допомогою достатніх умов оптимальності, а в роботі [3] побудовано і досліджено стохастичну модель оптимальної поведінки дистриб'ютора на ринку фармацевтичної продукції, описано структуру оптимального процесу.

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. У статті ми побудуємо стохастичну модель оптимальної кредитної стратегії дистриб'ютора на ринку фармацевтичної продукції із запізненням і використанням вінерівського та пуасонівського процесів, а також проведемо її дослідження.

Виклад основного матеріалу дослідження. Спочатку опишемо детерміновану модель кредитної стратегії дистриб'ютора. Нехай у будь-який момент часу $t \in [t_0, T]$ ($0 \le t_0 \le T$, T – горизонт планування) дистриб'ютор може отримати у банку грошовий кредит загальною сумою $k(t)$ за сталою відсотковою ставкою p. Цей кредит він використовує для купівлі фармацевтичної продукції обсягом $v(t)$ з метою її подальшого продажу та отримання відповідного доходу.

Припустимо, що приріст обсягу товару $v(t)$ у момент часу t у вартісному відношенні дорівнює обсягу кредиту $k(t)$ за винятком проданого обсягу товару $\alpha v(t)$ (α – коефіцієнт продажу) та з урахуванням доставленого обсягу товару $\beta v(t-\tau)$ із запізненням $\tau>0$ (β – коефіцієнт доставки обсягу товару), тобто

$$\dot{v}(t) = k(t) - \alpha v(t) + \beta v(t-\tau),\ t \in [t_0, T],$$

де $\dot{v}(t) = \dfrac{d}{dt} v(t)$.

До цієї диференціальної моделі необхідно додати початкову умову з передісторією:

$$v(\theta) = v_0(\theta),\ \theta \in [t_0 - \tau, t_0],$$

обмеження на прибуток від реалізації обсягу товару:

$$\gamma\alpha v(t) - \beta v(t-\tau) - pk(t) \ge \varepsilon,\ t \in [t_0, T],$$

де γ – доход з кожної одиниці реалізованого товару, $\varepsilon \ge 0$ – мінімальний прибуток, та обмеження на обсяг кредиту:

$$0 \le k(t) \le k_0,\ t \in [t_0, T].$$

Тоді задача дистриб'ютора полягає у максимізації сумарного (інтегрального) прибутку:

$$\Phi = \int_{t_0}^{T} \left[\gamma\alpha v(t) - \beta v(t-\tau) - pk(t) \right] dt \to \max_k$$

за вказаних вище умов.

У роботі [4] обґрунтовано, що при стохастичному моделюванні можна у праву частину рівнянь динаміки економічних станів показників вводити як складові вінерівські та пуасонівські випадкові процеси. Тому для стохастичного моделювання оптимальної кредитної стратегії дистриб'ютора в рівняння динаміки обсягу товару введемо лінійну комбінацію вінерівського та пуасонівського випадкових процесів.

Формалізуємо стохастичну модель оптимальної кредитної стратегії дистриб'ютора із запізненням.

Нехай $\{\Omega, F, P\}$ – ймовірнісний простір із множиною випадкових подій Ω, із σ – алгеброю $F = \{F_t, t \in [t_0; T]\}$ та мірою P; $\xi(t) \equiv \xi(t,\omega) \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел) – F_t – вимірний стандартний вінерівський процес із нульовим математичним сподіванням $M\xi(t) = 0$ та одиничною дисперсією $M\xi^2(t) = 1$; $\eta(t) \equiv \eta(t,\omega) \in \mathbb{R} - F_t$ – вимірний пуасонівський процес із математичним сподіванням $M\eta(t) = \lambda(t - t_0)$, $\lambda = \mathrm{const}$, $\omega \in \Omega$, $t \in [t_0; T]$, де M – математичне сподівання.

На ймовірнісному просторі $\{\Omega, F, P\}$ заданий випадковий обсяг товару $v(t) = v(t,\omega), \omega \in \Omega$, $t \in [t_0; T]$.

Припустимо, що обсяг товару $v(t)$ описується диференціальною моделлю у формі Іто [5, с. 163; 6, с. 278].

$$\dot{v}(t) = k(t) - \alpha v(t) + \beta v(t-\tau) + W_1(t)\dot{\xi}(t) + W_2(t)\dot{\eta}(t),$$
$$t \in [t_0, T], \tag{1}$$

задовольняє початкову умову з передісторією:

$$v(\theta) = v_0(\theta),\ v_0 \in F_0,\ \theta \in [t_0 - \tau, t_0], \tag{2}$$

та обмеження прибутку:

$$\gamma\alpha v(t) - \beta v(t-\tau) - pk(t) \ge \varepsilon,\ \varepsilon \ge 0,\ t \in [t_0, T], \ (3).$$

На обсяг кредитування $k(t)$ накладається обмеження:

$$0 \le k(t) \le k_0,\ t \in [t_0, T],\ k_0 = const, \ (4).$$

Тут $\alpha>0$, $\beta>0$ – сталі, γ – доход з кожної одиниці реалізованого товару (у коефіцієнтах), p – стала відсоткова ставка кредитування, $\varepsilon \ge 0$ – заданий мінімальний прибуток, k_0 – задана верхня межа обмеження на обсяг кредиту, τ – запізнення доставки обсягу товару; W_1 і W_2 – кусково-неперервні (неперервні) на $[t_0, T]$ функції, v_0 – кусково-неперервна (неперервна) на $[t_0 - \tau, t_0]$ функція; $\dot{\xi}(t)$ і $\dot{\eta}(t)$ – узагальнені похідні (похідні від функціоналів) від випадкових процесів вінерівського $\xi(t)$ та пуасонівського $\eta(t)$ процесів.

Критерієм мети виступає максимізація середнього сумарного (інтегрального) прибутку від реалізації обсягу товару:

$$\Phi = M_{ty} \int_{t}^{T} \left[\gamma\alpha v(t) - \beta y(t) - pk(t) \right] dt \to \max_k, \tag{5}$$

де M_{ty} – умовне математичне сподівання при умові, що $v(s-t)$ збігається з деякою кусково-неперервною функцією $y(s)$, $s \in [t_0, t]$, тобто $y(t) \equiv v(t-\tau)$, $t \in [t_0, T]$, функція $y(t)$ виступає деяким параметром [7, с. 117–119].

У математичному плані задача (1)–(5) є задачею стохастичного оптимального керування, де керуванням виступає обсяг кредитування k, а фазовою траєкторією – обсяг товару v.

Дослідження моделі. Для дослідження задачі (1)–(5) використаємо стохастичні достатні умови оптимальності [7, с. 116–119]. При цьому будуть проведені такі етапи:

1) побудова лівого процесу кредитування;

2) визначення моменту перемикання керування кредитуванням;

3) вибір правого процесу кредитування;

4) формування оптимального процесу кредитування.

Лівий кредитний процес включає ліве керування за обсягом кредитування $k_{лів}(t)$ та відповідну ліву траєкторію за обсягом товару $v_{лів}(t)$, $t \in [t_0, T]$. Запишемо рівняння Беллмана з крайовою умовою для задач (1)–(2), (4)–(5) [7, с. 116–119].

$$\inf_k R(t,k,v,y,V) \equiv \inf_k \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial v}(k - \alpha v + \beta y) + 0.5 W_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \lambda \left[V(t, v + W_2, y) - \right. \right.$$
$$\left. \left. - V(t,v,y) \right] - (\gamma \alpha v - \beta y - pk) \right\} = 0, \quad t \in [t_0, T], \; V(T, v(T), y(T)) = 0, \forall y(T) \geq 0, \tag{6}$$

де $V(t,v,y)$ – шукана неперервно-диференційована функція один раз по та двічі по на декартовому добутку $[t_0, T] \times \{v \geq 0\}$, $y(t)$ у рівнянні (6) виступає параметром.

Для врахування обмеження (3) використаємо метод Лагранжа, за яким у рівняння Беллмана введемо доданок $\varepsilon + pk - \gamma \alpha v + \gamma \beta y$. Отримаємо задачу безумовної оптимізації:

$$\tilde{R}(t,k,v,y,\chi) = R(t,k,v,y) + \chi[\varepsilon + pk - \gamma \alpha v + \beta y] \to \inf_{k,\chi}, \tag{7}$$

де χ – множник Лагранжа.

Запишемо необхідну умову оптимальності функції $\tilde{R}$ за змінною χ: рівність нулю частинної похідної $\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \chi}$. Одержимо нелінійне алгебраїчне рівняння при $y(t) \equiv v(t-\tau)$:

$$\varepsilon + pk(t) - \gamma \alpha v(t) + \beta v(t-\tau) = 0, \; t \in [t_0, T]. \tag{8}$$

Із використанням (8) функція $\tilde{R}$ рівна функції R.

Функція R лінійна по k, тому найменшого значення отримує при оптимізаційній величині за керуванням:

$$\tilde{k}(t) = \begin{cases} k_0, & \text{якщо } \dfrac{\partial V}{\partial v} + p < 0, \\ 0, & \text{якщо } \dfrac{\partial V}{\partial v} + p > 0, \\ \text{довільне із } [0, k_0], & \text{якщо } \dfrac{\partial V}{\partial v} + p = 0, \end{cases} \quad t \in [t_0, T] \tag{9}$$

Розглянемо випадок $\frac{\partial V}{\partial v} + p = 0$. Проінтегрувавши його, одержимо:

$$V(t,v,y) = -pv(t) + pv(T), \; t \in [t_0, T]. \tag{10}$$

Підставимо (10) у рівняння Беллмана (6) та використаємо факт, що на етапі оптимізації змінні t, v та y є функціонально незалежними. Отримаємо рівняння при $y(t) \equiv v(t-\tau)$:

$$(p-\gamma)\alpha v(t) - (p-1)\beta v(t-\tau) + \lambda p W_2(t) = 0, \quad t \in [t_0, T], \tag{11}$$

з якого методом кроків [8, с. 17] знаходимо оптимізаційну величину $\tilde{v}$:

$$\tilde{v}(t) = \begin{cases} \tilde{v}^{(1)}(t), & \text{при } t \in [t_0, t_0 + \tau], \\ \tilde{v}^{(2)}(t), & \text{при } t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau], \\ \ldots \\ \tilde{v}^{(N+1)}(t), & \text{при } t \in [t_0 + N\tau, T], \end{cases}$$

за якою із середньої динаміки обсягу товару (1) визначаємо оптимізаційну величину за керуванням $\tilde{k}$. Для отримання середньої динаміки обсягу товару (1) використаємо властивості вінерівських і пуасонівських випадкових процесів:

$$M\dot{\xi}(t) = (M\xi(t))' = 0, \; M\dot{\eta}(t) = (M\eta(t))' = (\lambda t)' = \lambda, \quad t \in [t_0, T], \tag{12}$$

тобто математичне сподівання від похідної дорівнює похідній від математичного сподівання.

У результаті цього із середньої динаміки обсягу товару (1) при $v = \tilde{v}$ отримаємо:

$$k(t) = \tilde{v}(t) - \beta \tilde{v}(t-\tau) - \lambda W_2(t), \; t \in [t_0, T],$$

і, відповідно, оптимізаційна величина по керуванню за обсягом кредитування має такий вигляд:

$$\tilde{k}(t) = \begin{cases} k_0, & \text{якщо } k(t) \geq k_0, \\ 0, & \text{якщо } k(t) \leq 0, \\ k(t), & 0 < k(t) < k_0, \; t \in [t_0, T]. \end{cases}$$

Тоді за допомогою (9) одержимо три оптимізаційні величини по керуванню за обсягом кредитування:

$$\tilde{k}(t) = \begin{cases} k_0, & \text{якщо } \dfrac{\partial V}{\partial v} + p < 0, \\ 0, & \text{якщо } \dfrac{\partial V}{\partial v} + p > 0, \\ k^*(t), & \text{якщо } 0 < k^*(t) < k_0 \text{ та } \dfrac{\partial V}{\partial v} + p = 0. \end{cases}$$

Оскільки W_2 – кусково-неперервна (неперервна), то оптимізаційна величина по керуванню $\tilde{k}$ – кусково-неперервна (неперервна) функція на $[t_0, T]$.

Таким чином, оптимізаційна величина по керуванню $\tilde{k}$ є детермінованою величиною та не залежить від коефіцієнта W_1 при прирості вінерівського процесу ( ). При цьому ми отримали три режими кредитування:

1) $\tilde{k}(t) = k_0, t \in [t_0, T]$ – режим повного кредитування;

2) $\tilde{k}(t) = 0, t \in [t_0, T]$ – режим відсутності кредитування;

3) $\tilde{k}(t) = k^*(t), t \in [t_0, T]$ – режим часткового кредитування.

Із наведених режимів кредитування сформуємо такі комбінації режимів (складені режими), які пізніше будуть описувати оптимальні керування за обсягом кредиту:

А) складений режим «повне + часткове + відсутнє» кредитування; при цьому режимі:

– за ліве керування візьмемо режим повного кредитування $k_{\text{лів}}(t)=k_0, t\in[t_0,\zeta_{\text{лів}})$, де $\zeta_{\text{лів}}$ – шуканий лівий момент перемикання керувань кредитом;

– за серединне керування візьмемо режим часткового кредитування $k_{\text{сер}}(t)=k^*, t\in[\zeta_{\text{лів}},\zeta_{\text{пр}})$, де $\zeta_{\text{пр}}$ – шуканий правий момент перемикання керувань кредитом;

– за праве керування візьмемо режим відсутності кредитування $k_{\text{пр}}(t)=0, t\in[\zeta_{\text{пр}},T]$.

Б) складений режим «часткове + відсутнє» кредитування; при цьому режимі:

– за ліве керування візьмемо режим часткового кредитування $k_{\text{лів}}(t)=k^*, t\in[t_0,\zeta_{\text{лів}})$;

– за праве керування візьмемо режим відсутності кредитування $k_{\text{пр}}(t)=0, t\in[\zeta_{\text{лів}},T]$.

Перейдемо до знаходження **моментів перемикання керування кредитуванням**, які визначаються залежно від вищенаведених складених режимів кредитування.

У *складеному режимі А)* лівий момент перемикання керування $\zeta_{\text{лів}}$ так визначається із рівняння (8) при $k(t)=k_0$:

$$\varepsilon+pk_0-\gamma\alpha v^{(c)}_{\text{лів}}(\zeta_{\text{лів}})+\beta v^{(c)}_{\text{лів}}(\zeta_{\text{лів}}-\tau)=0 \qquad (13)$$

за допомогою одного із числових методів розв'язання нелінійного алгебраїчного рівняння [9, с. 25–48; 10, с. 17–45, 53–75].

У рівнянні (13) $v^{(c)}_{\text{лів}}(t)$, $t\in[t_0,T]$ як середня ліва траєкторія за обсягом товару є розв'язком середньої динаміки (1) при $k(t)=k_0$ та середній початковій умові з передісторією (2):

$$\begin{aligned}&\dot v^{(c)}_{\text{лів}}(t)=k_0-\alpha v^{(c)}_{\text{лів}}(t)+\beta v^{(c)}_{\text{лів}}(t-\tau)+\lambda W_2(t), t\in[t_0,T]\\&v^{(c)}_{\text{лів}}(\theta)=Mv_0(\theta),\ \theta\in[t_0-\tau,t_0].\end{aligned} \qquad (14)$$

Початкову задачу (14) з передісторією можна розв'язати сумісним використання методу кроків [8, с. 17] та числового методу Рунге-Кутта [9, с. 167–170].

Правий момент перемикання керувань кредитуванням $\zeta_{\text{пр}}$ визначається із рівняння (8) при $k(t)=k^*$:

$$\varepsilon+pk^*(\zeta_{\text{пр}})-\gamma\alpha v^{(c)}_{\text{сер}}(\zeta_{\text{пр}})+\beta v^{(c)}_{\text{сер}}(\zeta_{\text{пр}}-\tau)=0,$$

де $v^{(c)}_{\text{сер}}(t)$, $t\in[\zeta_{\text{лів}},T]$ як середня серединна траєкторія за обсягом товару є розв'язком середньої динаміки обсягу товару (1) при $k(t)=k^*$ та середній початковій умові з передісторією (2):

$$\begin{aligned}&\dot v^{(c)}_{\text{сер}}(t)=k^*-\alpha v^{(c)}_{\text{сер}}(t)+\beta v^{(c)}_{\text{сер}}(t-\tau)+\lambda W_2(t), t\in[\zeta_{\text{лів}},T]\\&v^{(c)}_{\text{сер}}(\theta)=v^{(c)}_{\text{лів}}(\theta),\ \theta\in[\zeta_{\text{лів}}-\tau,\zeta_{\text{лів}}].\end{aligned}$$

Слід зауважити, що середня права траєкторія за обсягом товару $v^{(c)}_{\text{пр}}(t)$ є розв'язком такої початкової задачі з передісторією при $k(t)=k^*$:

$$\begin{aligned}&\dot v^{(c)}_{\text{пр}}(t)=-\alpha v^{(c)}_{\text{пр}}(t)+\beta v^{(c)}_{\text{пр}}(t-\tau)+\lambda W_2(t), t\in[\zeta_{\text{пр}},T]\\&v^{(c)}_{\text{пр}}(\theta)=v^{(c)}_{\text{сер}}(\theta),\ \theta\in[\zeta_{\text{пр}}-\tau,\zeta_{\text{пр}}].\end{aligned}$$

Таким чином, знайдені моменти перемикання керувань кредитуванням $\zeta_{\text{лів}}$ і $\zeta_{\text{пр}}$ є детермінованими величинами та не залежать від коефіцієнта W_1 при вінерівському процесі $\xi(t)$. Крім того, визначені середні процеси:

А1) при виконанні нерівностей $t_0<\zeta_{\text{лів}}<\zeta_{\text{пр}}<T$ (режим кредитування «повне + часткове + відсутнє»):

– середній лівий процес $\{k_{\text{лів}}(t)=k_0, v^{(c)}_{\text{лів}}(t), t\in[t_0,\zeta_{\text{лів}}]\}$;

– середній серединний процес $\{k_{\text{сер}}(t)=k^*, v^{(c)}_{\text{сер}}(t), t\in[\zeta_{\text{лів}},\zeta_{\text{пр}}]\}$;

– середній правий процес $\{k_{\text{пр}}(t)=0, v^{(c)}_{\text{пр}}(t), t\in[\zeta_{\text{пр}},T]\}$.

А2) при виконанні нерівностей $t_0<\zeta_{\text{лів}}<T$ та співвідношення $\zeta_{\text{пр}}\notin(t_0,T)$ (режим кредитування «повне + часткове»):

– середній лівий процес $\{k_{\text{лів}}(t)=k_0, v^{(c)}_{\text{лів}}(t), t\in[t_0,\zeta_{\text{лів}}]\}$;

– середній правий процес $\{k_{\text{пр}}(t)=k^*, v^{(c)}_{\text{пр}}(t), t\in[\zeta_{\text{лів}},T]\}$.

А3) при виконанні нерівностей $t_0<\zeta_{\text{лів}}=\zeta_{\text{пр}}<T$ (режим кредитування «повне + відсутнє»):

– середній лівий процес $\{k_{\text{лів}}(t)=k_0, v^{(c)}_{\text{лів}}(t), t\in[t_0,\zeta_{\text{лів}}]\}$;

– середній правий процес $\{k_{\text{пр}}(t)=0, v^{(c)}_{\text{пр}}(t), t\in[\zeta_{\text{лів}},T]\}$.

А4) при виконанні співвідношень $\zeta_{\text{лів}}\notin(t_0,T)$ і $\zeta_{\text{пр}}\notin(t_0,T)$ (режим повного кредитування) маємо лише середній лівий процес $\{k_{\text{лів}}(t)=k_0, v^{(c)}_{\text{лів}}(t), t\in[t_0,T]\}$.

У *складеному режимі Б)* лівий момент перемикання керування $\zeta_{\text{лів}}$ визначається із рівняння (8) при $k(t)=k^*(t)$:

$$\varepsilon+pk^*(\zeta_{\text{лів}})-\gamma\alpha v^{(c)}_{\text{лів}}(\zeta_{\text{лів}})+\beta v^{(c)}_{\text{лів}}(\zeta_{\text{лів}}-\tau)=0, \qquad (15)$$

яке можна розв'язати за допомогою одного із числових методів розв'язання нелінійного алгебраїчного рівняння [9; 10].

У рівнянні (15) $v^{(c)}_{\text{лів}}(t)$ як середня ліва траєкторія за обсягом товару є розв'язком початкової задачі з передісторією при $k(t)=k^*(t)$:

$$\begin{aligned}&\dot v^{(c)}_{\text{лів}}(t)=k^*(t)-\alpha v^{(c)}_{\text{лів}}(t)+\beta v^{(c)}_{\text{лів}}(t-\tau)+\lambda W_2(t), t\in[t_0,T]\\&v^{(c)}_{\text{лів}}(\theta)=Mv_0(\theta),\ \theta\in[t_0-\tau,t_0].\end{aligned}$$

Останню задачу можна розв'язати сумісним використання методу кроків [8] і методу Рунге-Кутта [9].

Слід зауважити, що середня права траєкторія за обсягом товару $v^{(c)}_{\text{пр}}(t)$ знаходиться з такої початкової задачі з передісторією при $k(t)=0$:

$$\begin{aligned}&\dot v^{(c)}_{\text{пр}}(t)=-\alpha v^{(c)}_{\text{пр}}(t)+\beta v^{(c)}_{\text{пр}}(t-\tau)+\lambda W_2(t), t\in[\zeta_{\text{лів}},T]\\&v^{(c)}_{\text{пр}}(\theta)=v^{(c)}_{\text{лів}}(\theta),\ \theta\in[\zeta_{\text{лів}}-\tau,\zeta_{\text{лів}}].\end{aligned}$$

Таким чином, одержали момент перемикання керування кредитуванням $\zeta_{\text{лів}}$ як детерміновану величину, яка не залежить від коефіцієнта W_1 при прирості вінерівського процесу $\dot\xi(t)$. Крім того, отримали процеси:

Б1) при виконанні нерівностей $t_0<\zeta_{\text{лів}}<T$ (режим кредитування «часткове + відсутнє»):

– середній лівий процес $\{k_{\text{лів}}(t)=k^*(t), v^{(c)}_{\text{лів}}(t), t\in[t_0,\zeta_{\text{лів}}]\}$;

– середній правий процес $\{k_{\text{пр}}(t)=0, v^{(c)}_{\text{пр}}(t), t\in[\zeta_{\text{лів}},T]\}$.

Б2) при виконанні співвідношення $\zeta_{\text{лів}}\notin(t_0,T)$ (режим часткового кредитування) маємо тільки такий середній лівий процес: $\left\{k_{\text{лів}}(t)=k^{*}(t), v_{\text{лів}}^{(\text{c})}(t), t\in\left[t_0,T\right]\right\}$.

Лівий, серединний і правий кредитний процес. Для визначення стохастичних лівого, серединного та правого процесів необхідно визначити стохастичні ліву, серединну та праву траєкторії за обсягом товару залежно від виду складених режимів. Вони знаходяться сумісним використання методу кроків [8, с. 17] та одного із числових методів [6, с. 278–295] із таких стохастичних початкових задач з передісторією.

У складеному режимі А:

А1) стохастична ліва траєкторія:

$$\dot{v}_{\text{лів}}(t)=k_0-\alpha v_{\text{лів}}(t)+\beta v_{\text{лів}}(t-\tau)+W_1(t)\dot{\xi}(t)+W_2(t)\dot{\eta}(t), t\in\left[t_0,\zeta_{\text{лів}}\right]$$

$$v_{\text{лів}}(\theta)=v_0(\theta),\ \theta\in\left[t_0-\tau,t_0\right].$$

А2) стохастична серединна траєкторія:

$$\dot{v}_{\text{сер}}(t)=k_0(t)-\alpha v_{\text{сер}}(t)+\beta v_{\text{сер}}(t-\tau)+W_1(t)\dot{\xi}(t)+W_2(t)\dot{\eta}(t), t\in\left[\zeta_{\text{лів}},\zeta_{\text{пр}}\right]$$

$$v_{\text{сер}}(\theta)=v_{\text{лів}}(\theta),\ \theta\in\left[\zeta_{\text{лів}}-\tau,\zeta_{\text{лів}}\right].$$

А3) стохастична права траєкторія:

$$\dot{v}_{\text{пр}}(t)=-\alpha v_{\text{пр}}(t)+\beta v_{\text{пр}}(t-\tau)+W_1(t)\dot{\xi}(t)+W_2(t)\dot{\eta}(t), t\in\left[\zeta_{\text{пр}},T\right]$$

$$v_{\text{пр}}(\theta)=v_{\text{сер}}(\theta),\ \theta\in\left[\zeta_{\text{пр}}-\tau,\zeta_{\text{пр}}\right].$$

У складеному режимі Б:

Б1) стохастична ліва траєкторія:

$$\dot{v}_{\text{лів}}(t)=k^{*}(t)-\alpha v_{\text{лів}}(t)+\beta v_{\text{лів}}(t-\tau)+W_1(t)\dot{\xi}(t)+W_2(t)\dot{\eta}(t), t\in\left[t_0,\zeta_{\text{лів}}\right]$$

$$v_{\text{лів}}(\theta)=v_0(\theta),\ \theta\in\left[t_0-\tau,t_0\right].$$

Б2) стохастична права траєкторія:

$$\dot{v}_{\text{пр}}(t)=-\alpha v_{\text{пр}}(t)+\beta v_{\text{пр}}(t-\tau)+W_1(t)\dot{\xi}(t)+W_2(t)\dot{\eta}(t), t\in\left[\zeta_{\text{лів}},T\right]$$

$$v_{\text{пр}}(\theta)=v_{\text{лів}}(\theta),\ \theta\in\left[\zeta_{\text{лів}}-\tau,\zeta_{\text{лів}}\right].$$

Ці стохастичні початкові задачі з передісторією мають єдині кусково-диференційовані (неперерервні та кусково-диференційовані) розв’язки у сенсі стохастичної еквівалентності [6, с. 278; 9, с. 166; 10], оскільки функції W_1 та W_2 кусково-неперервні (неперерервні) на $\left[t_0,T\right]\}$, функція v_0 кусково-неперервна (неперерервна) на $\left[t_0-\tau,t_0\right]$, функція $v_{\text{лів}}$ кусково-диференційована на $\left[\zeta_{\text{лів}}-\tau,\zeta_{\text{лів}}\right]$, а функція $v_{\text{сер}}$ кусково-диференційована на $\left[\zeta_{\text{пр}}-\tau,\zeta_{\text{пр}}\right]$.

Оптимальний кредитний процес. Згідно з результатами [7, с. 117–119] склейки у момент перемикання керувань кредитуванням $\zeta_{\text{лів}}$ середнього і стохастичного лівого $\left\{k_{\text{лів}}(t), v_{\text{лів}}(t), t\in\left[t_0,\zeta_{\text{лів}}\right]\right\}$ та середнього і стохастичного серединного процесів $\left\{k_{\text{сер}}(t), v_{\text{сер}}(t), t\in\left[\zeta_{\text{лів}},\zeta_{\text{пр}}\right]\right\}$, а також у момент перемикання керувань кредитуванням $\zeta_{\text{пр}}$ середнього і стохастичного серединного $\left\{k_{\text{сер}}(t), v_{\text{сер}}(t), t\in\left[\zeta_{\text{лів}},\zeta_{\text{пр}}\right]\right\}$ та середнього і стохастичного правого процесів $\left\{k_{\text{пр}}(t), v_{\text{пр}}(t), t\in\left[\zeta_{\text{пр}},T\right]\right\}$ дають середній і стохастичний оптимальний процес $\left\{k_{\text{оп}}(t), v_{\text{оп}}(t), t\in\left[t_0,T\right]\right\}$.

Конкретно для складеного режиму А:

$$k_{\text{оп}}(t)=\begin{cases} k_{\text{лів}}(t), \text{ якщо } t\in\left[t_0,\zeta_{\text{лів}}\right), \\ k_{\text{сер}}(t), \text{ якщо } t\in\left[\zeta_{\text{лів}},\zeta_{\text{пр}}\right), \\ k_{\text{пр}}(t), \text{ якщо } t\in\left[\zeta_{\text{пр}},T\right], \end{cases}$$

$$v_{\text{оп}}(t)=\begin{cases} v_{\text{лів}}(t), \text{ якщо } t\in\left[t_0,\zeta_{\text{лів}}\right], \\ v_{\text{сер}}(t), \text{ якщо } t\in\left[\zeta_{\text{лів}},\zeta_{\text{пр}}\right], \\ v_{\text{пр}}(t), \text{ якщо } t\in\left[\zeta_{\text{пр}},T\right]. \end{cases}$$

Аналогічно для складеного режиму Б:

$$k_{\text{оп}}(t)=\begin{cases} k_{\text{лів}}(t), \text{ якщо } t\in\left[t_0,\zeta_{\text{лів}}\right), \\ k_{\text{пр}}(t), \text{ якщо } t\in\left[\zeta_{\text{лів}},T\right], \end{cases}$$

$$v_{\text{оп}}(t)=\begin{cases} v_{\text{лів}}(t), \text{ якщо } t\in\left[t_0,\zeta_{\text{лів}}\right], \\ v_{\text{пр}}(t), \text{ якщо } t\in\left[\zeta_{\text{лів}},T\right]. \end{cases}$$

При цьому два оптимальні керування за обсягом кредитування $k_{\text{оп}}$ є детермінованими кусково-неперервними (неперервними) функціями на $\left[t_0,T\right]$ і не залежать від коефіцієнта W_1 при прирості вінерівського процесу $\dot{\xi}(t)$, а дві стохастичні оптимальні траєкторії за обсягом товару $v_{\text{оп}}$ є кусково-диференційованими (неперервними та кусково-диференційованими) функціями на $\left[t_0,T\right]$.

Сумарний прибуток від реалізації обсягу товару обчислюється за такою формулою:

$$\Phi_{\text{приб}}=\int_{t_0}^{T}\left[\gamma\alpha v_{\text{оп}}^{(\text{c})}(t)-\beta v_{\text{оп}}^{(\text{c})}(t-\tau)-pk_{\text{оп}}(t)\right]dt ,$$

для числового інтегрування якого можна використати один із числових методів [9, с. 99–128]. Тут $v_{\text{оп}}^{(\text{c})}(t)$ – середня оптимальна траєкторія за обсягом товару.

Зауважимо, що описана вище методика має місце, коли відсоткова ставка є кусково-сталою функцією такого вигляду:

$$p(t)=\begin{cases} p_1,\ \ t\in\left[t_0,T\right), \\ p_2,\ t\in\left[T_1,T_2\right), \\ \ldots \\ p_{N+1}, t\in\left[T_{N-1},T_N\equiv T\right]. \end{cases}$$

При стохастичному моделюванні динамічних систем необхідно вказати довірчі межі (проміжки) середнього значення та дисперсії генеральної сукупності оптимального обсягу товару.

Нехай проведено обчислюваний експеримент з визначення оптимального обсягу товару та одержано N ансамблів $v_{\text{оп}}^{i}(t), i=\overline{1,N}$, $t\in\left[t_0,T\right]$. Обчислимо за формулами [12, с. 213] вибіркову середню:

$$\overline{v}_{\text{оп}}(t)=N^{-1}\sum_{i=1}^{N}v_{\text{оп}}^{(i)}(t),\ t\in\left[t_0,T\right],$$

та вибіркову дисперсію:

$$s_{v_{\text{оп}}}^{2}(t)=(N-1)^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(v_{\text{оп}}^{(i)}(t)-\overline{v}_{\text{оп}}(t)\right)^{2},\ t\in\left[t_0,T\right].$$

Слід зауважити, що вибіркова середня нормальної генеральної сукупності оптимальної траєкторії за обсягом товару дорівнює (збігається) визначеній вище оптимальній траєкторії за обсягом товару, тобто $\overline{v}_{\text{оп}}(t)=v_{\text{оп}}^{(\text{c})}(t)$, $t\in\left[t_0,T\right]$.

Тоді довірчі проміжки для середнього значення та дисперсії нормальної генеральної сукупності оптимального обсягу товару набувають такого вигляду [12, с. 219]:

– для середнього значення:

$$\left(v_{\text{оп}}^{(\text{c})}(t)-\frac{t_\theta \cdot s_{v_{\text{оп}}}(t)}{\sqrt{N}};v_{\text{оп}}^{(\text{c})}(t)+\frac{t_\theta \cdot s_{v_{\text{оп}}}(t)}{\sqrt{N}}\right),\ t\in\left[t_0,T\right],$$

де t_θ – двосторонній θ-квантиль розподілу Стюдента з $(N-1)$ ступенями вільності при заданій довірчій ймовірності $\theta\in(0;1)$, який можна знайти за таблицями [12, с. 236–237];

– для дисперсії:

$$\left(\frac{(N-1)s_{v_{\text{оп}}}^2(t)}{\chi_{1-\theta}^2};\frac{(N-1)s_{v_{\text{оп}}}^2(t)}{\chi_\theta^2}\right),\ t\in\left[t_0,T\right],$$

де $\chi_{1-\theta}^2\left(\chi_\theta^2\right)-\ \theta(1-\theta)$ – квантиль розподілу Пірсона χ^2 із $(N-1)$ ступенем вільності та заданій довірчій ймовірності $\theta\in(0;1)$, які можна знайти за таблицями [12, с. 238–239].

Висновки. Запропонована стохастична модель оптимальної кредитної стратегії компанії-дистриб'ютора на ринку фармацевтичної продукції із запізненням при використанні вінерівського та пуасонівського процесів, а також проведено її дослідження.

1) Встановлено, що ця модель має два оптимальні процеси – два режими кредитування.

2) Досліджено, що в моделі стохастичної оптимальної кредитної стратегії дистриб'ютора із запізненням оптимальні керування за обсягом кредиту та моменти перемикання керувань кредитуванням є детермінованими величинами та не залежать від коефіцієнта при прирості вінерівського процесу, а оптимальні траєкторії за обсягом товару – стохастичними.

3) Описана структура двох оптимальних процесів для моделі стохастичної оптимальної кредитної стратегії дистриб'ютора із запізненням.

4) Визначені довірчі проміжки середнього значення та дисперсії нормальної генеральної сукупності оптимальної траєкторії за обсягом товару.

Побудована у цій роботі модель демонструє один з можливих підходів до моделювання оптимальної поведінки дистриб'ютора на ринку фармацевтичної продукції. На її основі можна побудувати, наприклад, детерміновані та стохастичні моделі оптимальної поведінки дистриб'ютора на ринку фармацевтичної продукції при кусково-сталій відсотковій ставці та інші моделі, які будуть формувати та вдосконалювати комплекс системних досліджень у цій галузі.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Григорків В.С. Моделювання оптимальної кредитної стратегії ріелтера / В.С. Григорків, О.І. Ярошенко // Економічна кібернетика. – 2007. – № 1–2 (43–44). – С. 4–9.
2. Бойчук М.В. Оптимізація кредитної стратегії компанії – дистриб'ютора на ринку фармацевтичної продукції / М.В. Бойчук, О.І. Ярошенко // Науковий вісник Буковинського державного фінансово-економічного університету. – 2015. – Вип. 28. Економічні науки. – С. 258–263.
3. Бойчук М.В. Стохастичне моделювання оптимальної кредитної стратегії компанії-дистриб'ютора на ринку фармацевтичної продукції / М.В. Бойчук, О.І. Ярошенко // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. – 2015. – № 11 (176). – С. 49–54.
4. Бойчук М.В. Стохастическая модель полного цикла оптимальной эколого-экономической динамики / М.В. Бойчук, А.Р. Семчук // Проблемы управления и інформатики. – 2013. – № 2. – С. 125–139.
5. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів : [навч. посібник] / А.В. Скороход – К. : Либідь, 1990. – 168 с.
6. Методи стохастичного моделювання систем / [І.В. Юрченко, Л.І. Ясинська, В.К. Ясинський]. – Чернівці : Прут, 2002. – 416 с.
7. Управление системами с последействием / [Е.А. Андреева, Е.Б. Колмановский, Л.Е. Шайхет]. – М. : Наука, 1992. – 336 с.
8. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин – М. : Наука, 1971. – 296 с.
9. Ясинський В.К. Основи обчислювальних методів : [навч. посіб.] / В.К. Ясинський. – Чернівці : Золоті литаври, 2005. – 395 с.
10. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М. : Наука, 1980. – 518 с.
11. Гихман И.И. Управляемые случайные процессы / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – научное издание. – К. : Наук. думка, 1977. – 251 с.
12. Эконометрика. Начальный курс : [учеб.] / [Я.Р. Магнус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий]. – 2-е изд., испр. – М. : Дело, 1998. – 248 с.